Midtoets Lineaire Algebra, vrijdag 10 december 2004

De toets bestaat uit 4 vraagstukkken. U krijgt 120 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Een matrix $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ heet *symmetrisch* indien $M^t = M$. Laat $S \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de deelverzameling zijn van symmetrische matrices.

a. Toon aan dat S een deelruimte is van $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

c. Stel $n = 3$. Bepaal in dit geval een basis van S.

d. Stel $n = 3$. Bepaal in dit geval de dimensie van S.

2. Voor een gegeven positief geheel getal n noteren we door $P_n(\mathbb{R})$ de vectorruimte over $\mathbb{R}$ bestaande uit alle polynomen met reële coefficienten, met graad hoogstens n. Beschouw nu de afbeelding

$$T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

gedefinieerd door $T(f(x)) = \int_0^1 f(x)dx$.

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.

b. Bepaal de nulruimte $N(T)$.

c. Bepaal de beeldruimte $R(T)$.

d. Bepaal de rang van T.

e. Bepaal de dimensie van $N(T)$.

f. Laat $\beta = \{1, x, x^2\}$ en $\gamma = \{1\}$ bases zijn van $P_2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$, respectievelijk. Bepaal de matrix $[T]_\beta^\gamma$ van T met betrekking tot deze bases.

3. Stel $\mathcal{V}$ een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Een lineaire afbeelding $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ heet een *projector* indien $T^2 = T$.

a. Toon aan: als T een projector is, dan is $I_{\mathcal{V}} - T$ ook een projector. (Hier is $I_{\mathcal{V}}$ de identiteitsafbeelding op $\mathcal{V}$.)

b. Toon aan: als T een projector is dan geldt $N(T) = R(I_{\mathcal{V}} - T)$.

4. We bekijken de volgende twee lineaire afbeeldingen:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(a, b) = (-b, a)$$

(rotatie tegen de klok in over een hoek $\frac{1}{2}\pi$), en

$$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, U(a, b) = (a + 2, b + 3)$$

(translatie over de vector $(2, 3)$.

a. Bepaal de matrices van de afbeeldingen T en U met betrekking tot de standaard geordende basis β van $\mathbb{R}^2$.

b. Bepaal de matrix van de samenstelling UT met betrekking tot de basis β.

c. Bepaal $(UT)^{-1}$.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 24
Vraagstuk 2: 24
Vraagstuk 3: 21
Vraagstuk 4: 21